Analyse op variëteiten

Tentamen d.d. vrijdag 11 april 2014, 9.00u–12.00u. Alle antwoorden dienen te worden gemotiveerd: alleen "ja", "nee" of "42" volstaat niet en levert geen punten op. Het tentamen bestaat uit zes opgaven. De puntenverdeling staat vermeld op de achterzijde. Het gebruik van rekenmachines, boeken of aantekeningen is niet toegestaan.

Opgave 1. Gegeven is de verzameling

$$M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,:\, x_1^2 + x_2^2 = 1,\ x_1x_3 + x_2x_4 = 0,\ x_3^2 + x_4^2 = 1\}.$$

(a) Bewijs dat M een 1-dimensionale deelvariëteit van $\mathbb{R}^4$ is.

(b) Zij $U = (0,1) \times (0,1) \times (-1,0) \times (0,1)$. Bewijs dat de afbeelding

$$h : (0, \tfrac{1}{2}\pi) \to \mathbb{R}^4, \qquad \theta \mapsto (\cos\theta, \sin\theta, -\sin\theta, \cos\theta)$$

een lokale parametrisering van $M \cap U$ is.

Opgave 2. Gegeven zijn de 1-vorm en de gladde afbeelding op $\mathbb{R}^2$:

$$\omega = x^2y\,dx - xy^2\,dy \quad \text{en} \quad \phi(u,v) = (u+v, u-v).$$

Bereken de terugtrekking $\phi^*(\omega)$.

Opgave 3. Beschouw de volgende 1-vorm op $\mathbb{R}^3$:

$$\omega = (e^y + ze^x)\,dx + (e^z + xe^y)\,dy + (e^x + ye^z)\,dz.$$

(a) Toon aan dat ω gesloten is.

(b) Bereken een gladde functie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ zodat $\omega = df$.

Opgave 4. Beschouw de volgende 1-vorm op $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:

$$\omega = -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy.$$

(a) Bereken de lijnintegraal $\int_c \omega$ voor de kromme

$$c(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

(b) Bewijs dat $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ niet enkelvoudig samenhangend is.

Zie ommezijde!

Opgave 5. Bewijs dat alle 3-vormen op $\mathbb{R}^2$ nul zijn.

Opgave 6. Zij $T : \Lambda^1(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ een contravariante 1-tensor op $\mathbb{R}^n$. Construeer een vectorveld X op $\mathbb{R}^n$ zodat

$$T(\omega) = \omega(X)$$

voor alle $\omega \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n)$.

Normering. Voor dit tentamen zijn in totaal 36 punten te behalen. Als p het aantal punten is, dan wordt het tentamencijfer berekend met de formule

$$C = 1 + \frac{p}{4}.$$

Voor de vraagstukken kunnen de volgende punten worden behaald:

	Opg. 1	Opg. 2	Opg. 3	Opg. 4	Opg. 5	Opg. 6
(a)	4	4	2	3	6	6
(b)	4		4	3		